

DETERMINAÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA DA INTENSIDADE ESTRUTURAL EM PLACAS

H. Reis Lopes¹ e J. Dias Rodrigues²

RESUMO

Na análise de estruturas mecânicas em vibração, a intensidade estrutural representa a distribuição do fluxo de potência transferida entre as fontes e os absorvedores de energia por propagação de ondas elásticas de tensão. O divergente da intensidade estrutural identifica a localização na estrutura das fontes e dos absorvedores de energia. O conhecimento da intensidade estrutural e do seu divergente reveste-se de grande importância, pois permite actuar de modo eficaz sobre a distribuição do fluxo de potência numa estrutura em vibração, quer alterando a sua trajectória, ou através da sua dissipação por tratamentos superficiais passivos. Assim, com base na intensidade estrutural podem desenvolver-se soluções de isolamento de vibrações por aplicação de dissipadores em regiões próximas das fontes de energia identificadas e de acordo com o trajecto do fluxo de energia.

Neste estudo é apresentada a formulação analítica e a formulação numérica por elementos finitos para a determinação, em regime estacionário harmónico, do fluxo de potência e do seu divergente em placas. A formulação analítica assenta na teoria de Kirchhoff de placas e na solução da equação diferencial do movimento utilizando a técnica da sobreposição modal. Na formulação por elementos finitos é adoptada uma metodologia de determinação directa da intensidade estrutural e do seu divergente. Um estudo comparativo entre a solução analítica e a solução numérica por elementos finitos para uma placa simplesmente apoiada valida o procedimento proposto de determinação directa da intensidade estrutural em placas pelo método dos elementos finitos o qual é aplicado a uma placa de geometria complexa.

1 INTRODUÇÃO

Os primeiros estudos sobre intensidade estrutural remontam à década de sessenta com trabalho publicado por Noiseux [1]. A formulação apresentada e designada de intensidade estrutural é baseada no conceito intensidade acústica utilizado na área da acústica para identificar as fontes e o fluxo de potência acústica. De forma análoga, o conceito de

¹ Assistente do 2º Triénio, Instituto Politécnico de Bragança, Departamento de Mecânica Aplicada, Bragança.

² Professor Auxiliar, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

intensidade estrutural é aplicado às estruturas para identificar o percurso do fluxo de potência vibratória entre as fontes e os dissipadores de energia, e através do cálculo do seu divergente localizar as fontes e os dissipadores de energia. A caracterização do fluxo da energia e da sua trajetória, identificando as fontes e os dissipadores na estrutura, permite desenvolver soluções de forma a actuar eficazmente na distribuição do fluxo de energia numa estrutura em vibração, por alteração da sua trajetória, ou mesmo, através da sua dissipação por tratamentos superficiais passivos.

2 FORMULAÇÃO GERAL DA INTENSIDADE ESTRUTURAL

A intensidade estrutural é uma grandeza vectorial que representa a distribuição do fluxo de potência transferida entre a fonte e o dissipador, onde o fluxo de potência ocorre por propagação de ondas elásticas através de um meio estrutural contínuo. A intensidade estrutural instantânea, quantidade dependente do tempo, representa o fluxo de potência numa estrutura através da direcção, do sentido e da intensidade. O vector da intensidade estrutural instantânea define-se pelo produto entre o tensor das tensões e o vector velocidade, de acordo com a expressão [2, 3]:

$$\vec{i}(t) = -[\sigma] \bullet \dot{\vec{v}} = - \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Na figura 1 representam-se, para um elemento infinitesimal de material isotrópico e elástico de um meio contínuo, as componentes do tensor, do vector velocidade e do vector da intensidade estrutural, as quais, de acordo com a expressão (1), estão orientadas no sentido positivo.

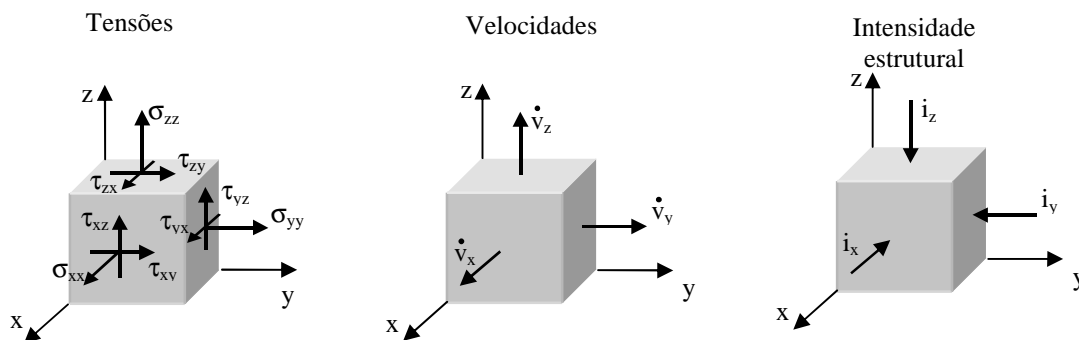


Figura 1- Representação das componentes do tensor das tensões, da velocidade e da intensidade estrutural instantânea.

Por sua vez, o vector intensidade média é uma quantidade vectorial independente do tempo. Em regime estacionário harmónico, cada componente da intensidade estrutural passa a ser expressa como função da frequência de vibração ω . A aplicação da forma fasorial de amplitude e fase à definição de intensidade estrutural média conduz à representação em notação complexa da intensidade estrutural média, a qual se escreve na seguinte forma:

$$\{\tilde{\Pi}(\omega)\} = -\frac{1}{2}[\tilde{\sigma}(\omega)]\{\tilde{\dot{v}}^*(\omega)\} \quad (2)$$

onde o símbolo \sim designa uma quantidade complexa, enquanto que o símbolo $*$ representa o complexo conjugado.

Todavia, a intensidade média em notação complexa pode ainda exprimir-se pelas suas componentes real e imaginária:

$$\{\tilde{I}(\omega)\} = \{I(\omega)\} + j\{J(\omega)\} \quad (3)$$

Fisicamente, a componente real $\{I(\omega)\}$ da intensidade média, designada de intensidade activa, representa a propagação do fluxo de potência activa por unidade de secção transversal, a partir da fonte para os elementos dissipativos de energia. Por seu lado, a componente imaginária $\{J(\omega)\}$, designada de intensidade reactiva, representa a distribuição do fluxo de potência reactiva por unidade de secção transversal. Esta componente representa a recirculação da energia entre a fonte e a estrutura vibratória, a qual resulta do desequilíbrio energético entre os elementos estruturais de massa e rigidez do sistema.

Através do divergente do vector intensidade estrutural identifica-se a localização das fontes e dos absorvedores de energia, respectivamente através dos máximos e dos mínimos da função intensidade estrutural. Genericamente, o divergente da intensidade estrutural é definido pela seguinte expressão:

$$\text{div} \vec{I}(\omega) = \nabla \vec{I}(\omega) = \frac{\partial I_x(\omega)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial I_y(\omega)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial I_z(\omega)}{\partial z} \vec{k} \quad (4)$$

3 INTENSIDADE ESTRUTURAL POR VIA ANALÍTICA

As placas são estruturas planas que apresentam uma das dimensões, a espessura, muito inferior em relação às outras duas, segundo as quais ocorre a propagação da energia de vibração produzindo o fluxo de potência.

A formulação para placas a seguir apresentada assenta na teoria de Kirchhoff, na qual se despreza a deformação provocada pelas tensões de corte ao longo da espessura. Esta é uma boa aproximação em placas finas com espessura 1/100 inferior em relação à menor das outras duas dimensões.

Por definição, a intensidade estrutural envolve a distribuição dos campos de tensões e de velocidades na placa. Porém, as tensões estão directamente relacionadas com os esforços internos na placa pela teoria da elasticidade. Assim, a intensidade estrutural na placa pode ser definida como resultado da contribuição dos vários esforços actuantes nas direcções x e y da placa multiplicados pelas velocidades que lhes estão associadas. Na figura 2 representam-se, para o plano médio da placa, os esforços e os deslocamentos generalizados, cujos sentidos são adoptados como positivos.

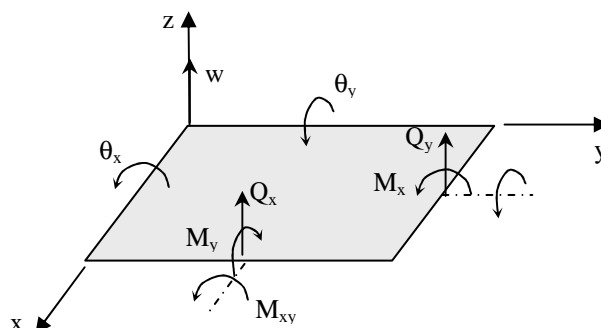


Figura 2- Representação dos esforços, deslocamentos e rotações no plano médio de uma placa.

Deste modo, para cada uma das direcções x e y da placa, em regime estacionário harmónico, a intensidade estrutural vem definida por:

$$\tilde{\Pi}_x(x, y, \omega) = -\frac{j\omega}{2} \left[-\tilde{M}_y(x, y)\tilde{\theta}_y^*(x, y) + \tilde{M}_{xy}(x, y)\tilde{\theta}_y^*(x, y) + \tilde{Q}_x(x, y)\tilde{w}^*(x, y) \right] \quad (5)$$

$$\tilde{\Pi}_y(x, y, \omega) = -\frac{j\omega}{2} \left[\tilde{M}_x(x, y)\tilde{\theta}_x^*(x, y) + \tilde{M}_{yx}(x, y)\tilde{\theta}_x^*(x, y) + \tilde{Q}_y(x, y)\tilde{w}^*(x, y) \right] \quad (6)$$

onde $\tilde{M}_x(x, y)$ e $\tilde{M}_y(x, y)$ representam os momentos flectores, $\tilde{M}_{xy}(x, y)$ e $\tilde{M}_{yx}(x, y)$ os momentos torsores, $\tilde{Q}_x(x, y)$ e $\tilde{Q}_y(x, y)$ os esforços de corte, e $\tilde{w}^*(x, y)$, $\tilde{\theta}_x^*(x, y)$ e $\tilde{\theta}_y^*(x, y)$ representam, respectivamente, o complexo conjugado do deslocamento transversal da placa, o complexo conjugado da rotação segundo o eixo x e o complexo conjugado da rotação segundo o eixo y.

De acordo com a teoria de Kirchhoff, os esforços internos podem exprimir-se unicamente a partir do campo de deslocamentos e das respectivas derivadas espaciais em x e y [4]. Além disso, conforme referido, a intensidade estrutural pode exprimir-se nas componentes real e imaginária, designadas de intensidade activa e intensidade reactiva, respectivamente. Com efeito, depois de efectuadas as respectivas substituições, a intensidade activa e a intensidade reactiva na placa em regime estacionário harmónico definem-se pelas seguintes expressões:

$$I(x, y) = \frac{\omega D}{2} \text{Im} \left[-\nabla^2 \tilde{w}(x, y) \nabla \tilde{w}^*(x, y) - \frac{1-\nu}{2} \nabla \times \nabla \times (\tilde{w}(x, y) \nabla \tilde{w}^*(x, y)) + \nabla (\nabla^2 \tilde{w}(x, y)) \tilde{w}^*(x, y) \right] \quad (7)$$

$$J(x, y) = -\frac{\omega D}{2} \text{Re} \left[-\nabla^2 w(x, y) \nabla w^*(x, y) - \frac{1-\nu}{2} \nabla \times \nabla \times (\tilde{w}(x, y) \nabla \tilde{w}^*(x, y)) + \nabla (\nabla^2 \tilde{w}(x, y)) \tilde{w}^*(x, y) \right] \quad (8)$$

onde ω é a frequência de vibração, ν é o coeficiente de Poisson, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ o módulo de rigidez à flexão da placa e $\nabla = (\partial/\partial x; \partial/\partial y; 0)$ o operador nabla.

3.1 Aplicação

Na figura 3 representa-se uma placa simplesmente apoiada na qual são aplicados uma força harmónica exterior de frequência ω e um amortecedor localizado do tipo viscoso de constante C_{ext} .

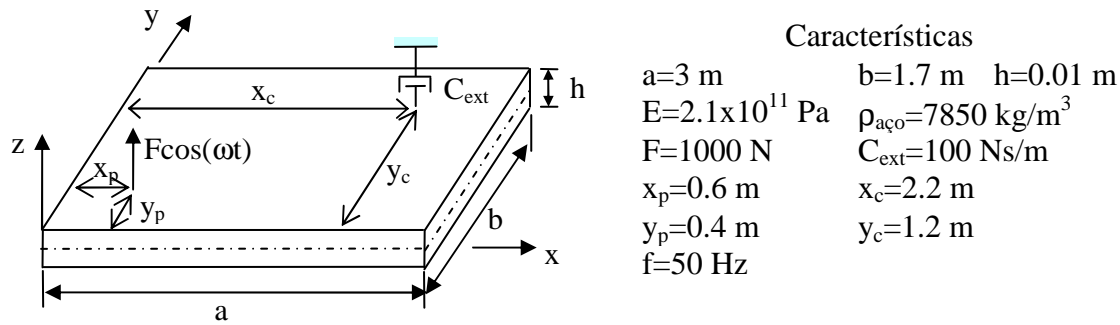


Figura 3 – Placa simplesmente apoiada submetida a uma excitação harmônica e com amortecimento externo.

A solução analítica para a resposta estacionária de uma placa simplesmente apoiada é determinada através da resolução da equação diferencial de movimento recorrendo ao teorema da expansão, o qual é baseado nas propriedades de ortogonalidade das funções características das formas naturais de vibração [5]. Deste modo, a resposta em deslocamento vem expressa como uma sobreposição das diferentes funções características das formas naturais de vibração da placa multiplicadas pelos respectivos factores de participação modal. Assim, o campo de deslocamentos $w(x, y, t)$ para a placa simplesmente apoiada em regime estacionário harmónico de frequência ω e com amortecimento viscoso externo localizado C_{ext} vem definido por [6]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \left[\frac{F \sin\left(\frac{n\pi}{a} x_p\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y_p\right) + R \sin\left(\frac{n\pi}{a} x_c\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y_c\right)}{\frac{Dab}{4} \left(\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 - \frac{M\omega^2}{4}} \right] \cos(\omega t) \quad (9)$$

onde R é a amplitude da força desenvolvida no amortecedor que é dada pela expressão [2]:

$$R(t) = -j\omega F C_{\text{ext}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a} x_c\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y_c\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x_p\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y_p\right)}{\frac{Dab}{4} \left(\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\rho ab h \omega^2}{4} + j C_{\text{ext}} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x_c\right) \sin^2\left(\frac{m\pi}{b} y_c\right)} \cos(\omega t) \quad (10)$$

Como o campo de deslocamentos $w(x, y, t)$ em (9) é calculado com uma base modal truncada, e em consequência os esforços dinâmicos internos, a selecção da dimensão da base modal truncada é condicionada pela convergência do esforço de corte. Com efeito, o esforço de corte envolve a terceira derivada espacial do campo de deslocamentos e assume, assim, uma importância determinante na precisão da determinação da intensidade estrutural. Na figura 4 representam-se os factores de participação modal para o campo de deslocamentos e para o campo de esforço de corte da placa simplesmente apoiada correspondentes a uma malha [20x20] dos modos naturais de vibração. Nesta representação pode observar-se que, por um lado, o maior contributo corresponde aos modos situados na banda da frequência de excitação ($f=50\text{Hz}$) e, por outro lado, que os modos de frequência mais elevada assumem um maior relevo para o esforço de corte do que para o deslocamento. Assim, pois, a precisão da intensidade estrutural é fortemente condicionada pela convergência do esforço de corte com a dimensão da base modal truncada incluída na análise.

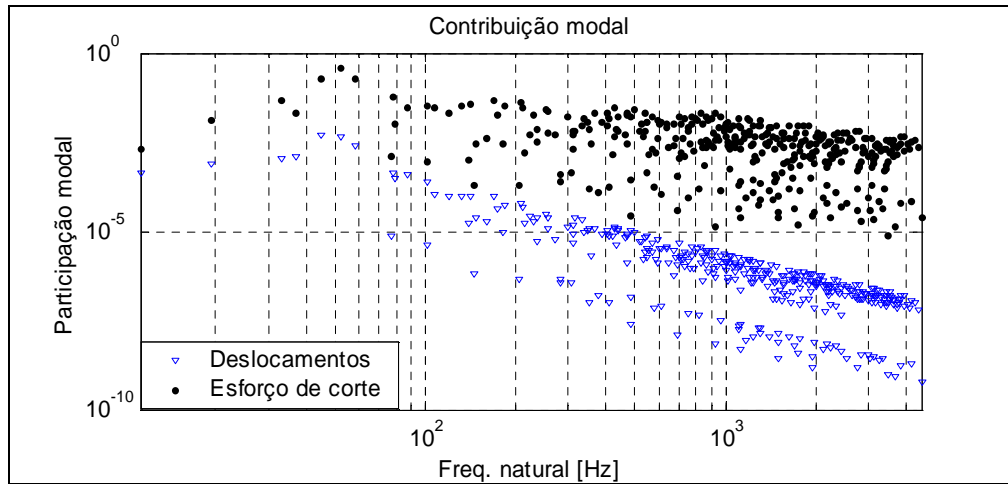


Figura 4 – Representação dos factores participação modal do deslocamento e do esforço de corte $Q_y(x,y)$ da placa simplesmente apoiada.

Na figura 5 pode observar-se a representação do fluxo de potência e o respectivo divergente na placa simplesmente apoiada, truncando a sobreposição modal com malhas de 2x2, 4x4, 8x8 e 20x20 modos naturais de vibração.

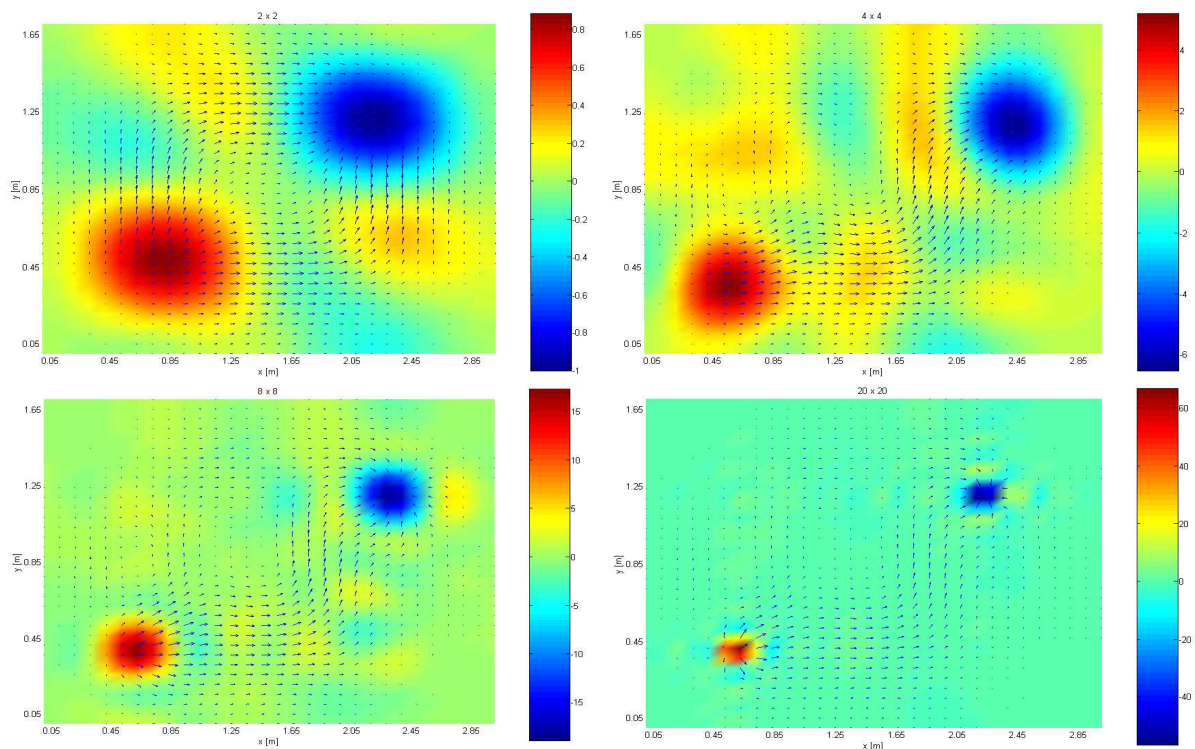


Figura 5 – Fluxo de potência e divergente para a placa simplesmente apoiada com a excitação a (0.6m ; 0.4m) e o amortecedor a (2.2m ; 1.2m) para o número de modos 2x2, 4x4 8x8 e 20x20.

Os mapas de intensidade estrutural representados na figura 5 evidenciam ser necessário um número elevado de modos naturais de vibração para uma correcta representação do fluxo de potência e do seu divergente para a identificação da fonte e do dissipador de energia vibratória. Neste caso, o fluxo de potência propaga-se preferencialmente pela região inferior da placa convergindo finalmente para a posição do amortecedor. A

potência activa fornecida converge para o valor de 1.159 W e a potência reactiva converge para 15.598 W.

4 INTENSIDADE ESTRUTURAL POR VIA NUMÉRICA

No procedimento de determinação da intensidade estrutural por recurso ao método dos elementos finitos optou-se, em alternativa ao método da sobreposição modal, por uma metodologia de determinação directa da intensidade estrutural e do seu divergente a partir do modelo espacial resultante da discretização por elementos finitos.

O método dos elementos finitos assenta na discretização espacial do domínio por elementos interligados entre si por nós e permite analisar o comportamento dinâmico de uma estrutura através dos deslocamentos nodais e respectivos esforços internos dinâmicos.

Para uma solicitação do tipo harmónico $\{f(t)\} = \{\tilde{F}\}e^{j\omega t}$ em que o vector $\{\tilde{F}\}$ representa as amplitudes das forças nodais de excitação e ω a frequência de excitação, a equação matricial do movimento em regime estacionário harmónico toma a seguinte forma [5]:

$$[-\omega^2[m] + j\omega[c] + [k]] \{\tilde{V}\} = \{\tilde{F}\} \quad (11)$$

onde $[m]$ é a matriz de massa generalizada e $[k]$ a matriz de rigidez generalizada, obtidas a partir da *assemblagem* das matrizes elementares de massa $[m^e]$ e de rigidez $[k^e]$. A matriz $[c]$ é a matriz de amortecimento global de tipo viscoso e inclui o amortecimento interno e externo corresponde aos amortecedores externos localizados. As componentes complexas do vector $\{\tilde{V}\}$ representam a amplitude e a fase dos deslocamentos nodais generalizados e constituem a resposta estacionária harmónica do sistema.

A partir do vector de amplitudes $\{\tilde{V}\}$ da resposta estacionária harmónica do sistema extraem-se os vectores $\{\tilde{V}^e\}$ de deslocamentos nodais dos elementos e determinam-se os esforços internos generalizados $\{\tilde{Q}^e\}$ em cada elemento finito, definidos pela seguinte expressão:

$$\{\tilde{Q}^e\} = (-\omega^2[m^e] + [k^e])\{\tilde{V}^e\} \quad (12)$$

Aplicando a formulação da intensidade activa a cada elemento finito, o fluxo de potência I_i^e em cada nó i de um elemento é determinado através dos esforços dinâmicos generalizados e das correspondentes velocidades generalizados. Assim, o fluxo de potência para as direcções x e y , $(I_i)_x$ e $(I_i)_y$, de um elemento de placa são definidos pelas seguintes expressões:

$$(I_i)_x = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left[-(\tilde{M}_i^e)_y (\tilde{\theta}_i^e)_y^* + (\tilde{M}_i^e)_{xy} (\tilde{\theta}_i^e)_y^* + (\tilde{Q}_i^e)_x (\tilde{w}_i^e)^* \right] \quad (13)$$

$$(I_i)_y = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left[(\tilde{M}_i^e)_x (\tilde{\theta}_i^e)_x^* + (\tilde{M}_i^e)_{yx} (\tilde{\theta}_i^e)_x^* + (\tilde{Q}_i^e)_y (\tilde{w}_i^e)^* \right] \quad (14)$$

em que $(\tilde{w}_i^e)^*$ é o complexo conjugado do deslocamento transversal do nó i , $(\theta_i^e)_x^*$ e $(\theta_i^e)_y^*$ são o complexo conjugado das rotações, $(\tilde{M}_i^e)_x$, $(\tilde{M}_i^e)_y$, $(\tilde{M}_i^e)_{xy}$ e $(\tilde{M}_i^e)_{yx}$ são os momentos flector e tissor complexos e $(\tilde{Q}_i^e)_x$ e $(\tilde{Q}_i^e)_y$ o esforço de corte complexo.

A partir do fluxo de potência ou intensidade estrutural determina-se, por derivação espacial, o divergente da fluxo de potência, o qual permite identificar a localização das fontes e dissipadores de energia, respectivamente máximos e mínimos da função intensidade estrutural. Adoptando o método das diferenças finitas centrais, o divergente do fluxo de potência em cada nó i da malha de elementos finitos para a direcção x e y da placa é definido por:

$$\frac{\partial(I_i)_x}{\partial x} = \frac{(I_{i+1})_x - (I_{i-1})_x}{2 \Delta x} \quad (15)$$

$$\frac{\partial(I_i)_y}{\partial y} = \frac{(I_{i+1})_y - (I_{i-1})_y}{2 \Delta y} \quad (16)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$, onde i representa o nó genérico da malha, Δx o passo na direcção x , Δy o passo na direcção y e N o número de pontos de discretização em cada direcção da placa.

4.1 Aplicações

Retomando a configuração da placa simplesmente apoiada apresentada na figura 3, discretizada numa malha de $[30 \times 34]$ elementos finitos quadráticos de placa [7] com integração selectiva, procedeu-se à determinação do fluxo de potência e do seu divergente que se apresentam na figura 6.

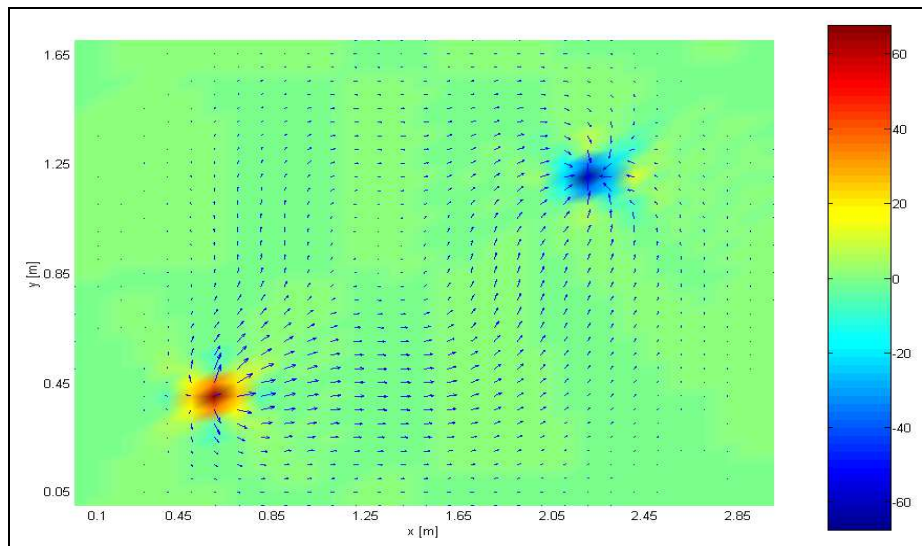


Figura 6 – Fluxo de potência e divergente para a placa simplesmente apoiada com a excitação a (0.6m ; 0.4m) e o amortecedor a (2.2m ; 1.2m) .

A análise comparativa entre a representação do fluxo de potência obtido por via analítica, figura 5, e a representação do fluxo de potência obtido por elementos finitos, figura 6, evidencia graficamente uma boa concordância entre ambos os resultados. Refira-se que a solução pelo método dos elementos finitos é determinada directamente a partir do

modelo espacial, não envolvendo a truncatura modal da solução analítica. Relativamente ao divergente, a solução por elementos finitos identifica de forma correcta a localização da excitação e do amortecedor. Deste modo, valida-se o procedimento proposto de determinação da intensidade estrutural e do seu divergente em placas pelo método dos elementos finitos.

Para ilustrar a aplicação do procedimento proposto a placas de geometria complexa, considere-se a placa simplesmente apoiada apresentada na figura 3 na qual foi criada uma descontinuidade através da inserção de uma abertura rectangular no seu interior, sendo o bordo interior da placa considerado como simplesmente apoiado, conforme se representa na figura 7.

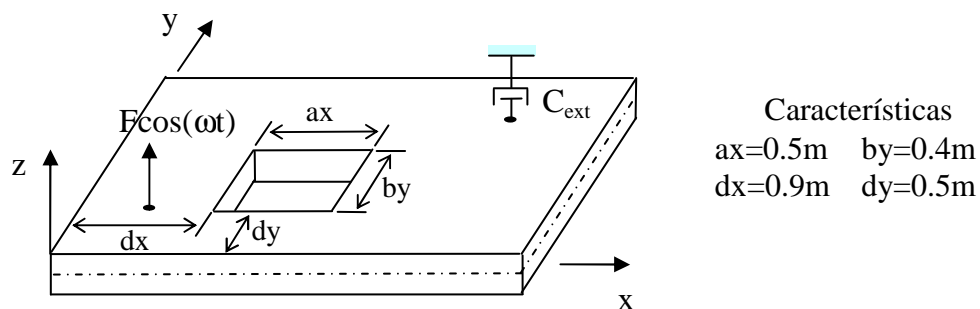


Figura 7 – Placa simplesmente apoiada com descontinuidade submetida a uma excitação harmónica e com amortecimento externo.

Na figura 8 representa-se o fluxo de potência e o seu divergente calculados pelo método dos elementos finitos para as condições de funcionamento apresentadas na figura 3.

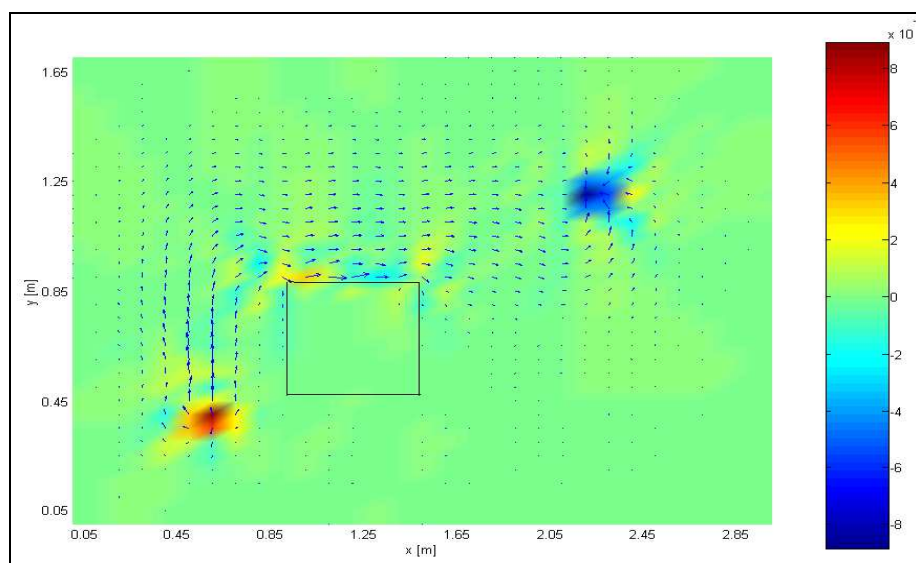


Figura 8 – Fluxo de potência e divergente para a placa descontínua com a excitação a (0.6m ; 0.4m) e o amortecedor a (2.2m ; 1.2m).

Com a introdução da descontinuidade na placa verifica-se uma alteração significativa na distribuição do fluxo de potência. Com efeito, na presença da descontinuidade, o fluxo de potência propaga-se pela região superior da placa contornando a descontinuidade. A localização da excitação e do amortecedor é correctamente identificada pelo divergente da intensidade estrutural.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi desenvolvido um procedimento para a determinação da intensidade estrutural e do seu divergente em placas por recurso ao método dos elementos finitos. Em alternativa à técnica da sobreposição modal utilizada na formulação analítica, onde é necessário incluir uma base alargada de modos naturais de vibração, o procedimento proposto assenta directamente nas equações do modelo espacial obtido por discretização pelo método dos elementos finitos.

Com base na formulação numérica implementada, e através da determinação e análise da intensidade estrutural e do seu divergente numa placa descontínua, demonstrou-se a aplicabilidade do procedimento a placas de geometria complexa.

Finalmente, refira-se o interesse intrínseco à intensidade estrutural e ao seu divergente na caracterização e na identificação da trajectória do fluxo de potência e da localização das fontes e dos dissipadores de energia numa estrutura em vibração, numa perspectiva de desenvolvimento de soluções de isolamento de vibrações.

REFERÊNCIAS

- [1] D. U. Noiseux, “Measurement of power flow in uniform beams and plates”, *Journal of Acoustical Society of America* – vol 47, pp 238-247, 1970.
- [2] G. Pavić, “Measurement of Structure Borne Wave Intensity, Part I: Formulation of The Methods” *Journal of Sound and Vibration* – vol 49(2), pp 221-230, 1976.
- [3] G. Pavić, “Energy flow induced by the structural vibrations of elastic bodies”, *Proceedings of the Third International Congress on Intensity Techniques*, Senlis-France, August 1990.
- [4] S. P. Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger, “Theory of Plates and Shells”, 1959, 2nd Edition, McGraw-Hill.
- [5] J. F. D. Rodrigues, *Apontamentos da disciplina de Dinâmica das Estruturas*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1999.
- [6] L. Gravić, “Influence Of Local Modifications on Energy Flow In Thin-Walled Structures” *Phd Thesis*, Université de Technologie de Compiègne, December 1991.
- [7] Klaus-Jürgen Bathe, “Finite Element Procedure”, Prentice Hall, 1996.